29/10/2018

Φυσικοί Αριθμοί Μεγαλύτεροι του 1

↓ πρώτοι: ακριβώς δύο φυσικούς διαιρέτες, τον εαυτό του και το 1

↓ σύνθετοι $a = \beta\gamma$, $1<\beta<a$, $1<\gamma<a$: έχει τουλάχιστον έναν διαιρέτη ακόμη εκτός από τους δύο.

Πρόταση Κάθε φυσικός μεγαλύτερος του 1 έχει τουλάχιστον ένα πρώτο διαιρέτη.

Θεώρημα Ευκλείδη Το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

→ Οι πιο κοντινοί μεταξύ τους πρώτοι αριθμοί είναι το 2 και το 3 που απέχουν κατά 1.

→ Οι 3 και 5 απέχουν κατά 2.

$$\left.\begin{array}{l} 5-3=2 \\ 13-11=2 \end{array}\right\}$$ Δύο πρώτοι αριθμοί λέγονται δίδυμοι αν η διαφορά τους είναι δύο

Πρόταση Για κάθε φυσικό αριθμό n, οι n σε πλήθος διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί $(n+1)!+2, (n+1)!+3, \dots, (n+1)!+k, \dots, (n+1)!+(n+1)$ είναι σύνθετοι $(2 \le k \le n+1)$

- $1 \mid (n+1)!+k$
- $(n+1)!+k \mid (n+1)!+k$
- $k \mid (n+1)!+k = 1 \cdot 2 \cdots k \cdots (n+1)+k$, $1<k<(n+1)!+k$

Άρα $(n+1)!+k$ είναι σύνθετος.

<u>Πρόταση</u> Κάθε σύνθετος φυσικός αριθμός $a>1$ έχει ένα τουλάχιστον πρώτο διαιρέτη $p \le \sqrt{a}$

Έστω a σύνθετος αριθμός $\Rightarrow a = \beta\gamma$, $1<\beta<a$, $1<\gamma<a$

Ένα απο τα β και γ είναι μικρότερο ή ίσο απο το άλλο. Έστω $\beta \le \gamma$. Τότε $\beta^2 \le \beta\gamma \Rightarrow$

$\beta^2 \le a \Rightarrow \beta \le \sqrt{a}$

$\beta > 1 \Rightarrow$ το β έχει τουλάχιστον ένα πρώτο διαιρέτη p.

$p|\beta$, $\beta|a \Rightarrow p|a$

$p \le \beta \le \sqrt{a}$. Άρα $p|a$ και $p \le \sqrt{a}$

<u>Πόρισμα</u> Αν ένας φυσικός αριθμός $a>1$ δεν διαιρείται απο κανένα πρώτο αριθμό $p \le \sqrt{a}$, τότε ο a είναι πρώτος αριθμός

$a>1 \Rightarrow$ a σύνθετος $\to$ άτοπο απο προηγούμενη πρόταση

ή

<u>a πρώτος</u>

<u>Άσκηση</u> Δείξτε ότι ο αριθμός 53 είναι πρώτος

$\sqrt{53} = 7... < 8$

πρώτοι αριθμοί μικρότεροι του 8: 2, 3, 5, 7

$53 = 26 \cdot 2 + 1 \to$ το 2 δεν διαιρεί το 53 : $2 \nmid 53$

$53 = 17 \cdot 3 + 2 \to$ το 3 δεν διαιρεί το 53 : $3 \nmid 53$

$53 = 10 \cdot 5 + 3 \to$ το 5 δεν διαιρεί το 53 : $5 \nmid 53$

$53 = 7 \cdot 7 + 4 \to$ το 7 δεν διαιρεί το 53 : $7 \nmid 53$

Άρα το 53 δεν διαιρείται απο κανένα πρώτο αριθμό $p \le \sqrt{53} < 8$

Συνεπώς, ο 53 είναι πρώτος αριθμός.

Άσκηση Δείξτε ότι ο αριθμός 91 δεν είναι πρώτος

$91 = 13 \cdot 7$

Το 7 διαιρεί το 91 άρα το 91 είναι σύνθετος αριθμός

Το Κόσκινο του Ερατοσθένη

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	

Ορισμός Έστω $a_1, \dots, a_n$ ακέραιοι με ένα τουλάχιστον διάφορο του μηδενός. Ο φυσικός αριθμός d ονομάζεται μέγιστος κοινός διαιρέτης των ακεραίων αριθμών $a_1, \dots, a_n$ αν

(i) $d | a_1, d | a_2, \dots, d | a_n$

(ii) Αν $\delta | a_1, \delta | a_2, \dots, \delta | a_n$ τότε $\delta \le d$

Συμβολικά: $d = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n)$
$= (a_1, \dots, a_n)$
μέγιστος κοινός διαιρέτης

Παράδειγμα ΜΚΔ$(6,10) = 2$

διαιρέτες του 6: $\{1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6\}$

διαιρέτες του 10: $\{1, 2, 5, 10, -1, -2, -5, -10\}$

κοινοί διαιρέτες: $\{-1, -2, 1, 2\}$

Άρα ΜΚΔ$(6,10) = 2$

Θεώρημα Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n$ ακέραιοι με ένα τουλάχιστον από αυτούς διάφορο του μηδενός. Αν $d = \text{μκδ}(a_1, \dots, a_n)$, τότε υπάρχουν ακέραιοι $k_1, k_2, \dots, k_n$ έτσι ώστε
$d = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n$

Απόδειξη Έστω $S = \{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \mid x_i \in \mathbb{Z}\}$

$a_1 = 1a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n$, $a_1 \in S$

όμοια $a_j \in S$, $-a_j \in S$

Έστω $a_i \neq 0$, τότε $a_i \in S$ και $-a_i \in S \Rightarrow$
$\Rightarrow |a_i| \in S \cap \mathbb{N} \Rightarrow S \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. Άρα από την αρχή της καλής διάταξης, το $S \cap \mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω d.

Ισχυρίζομαι ότι το d/a για κάθε $a \in S$

Έστω $a \in S \Rightarrow a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$

$\Rightarrow$ Το d είναι το ελάχιστο στοιχείο του $S \cap \mathbb{N}$, άρα $d \in S$

$\Rightarrow d = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n$

$a = qd + r$, $0 \leq r < d$

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = q(k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n) + r$

$\Rightarrow r = (\lambda_1 - k_1 q) a_1 + (\lambda_2 - k_2 q) a_2 + \dots + (\lambda_n - k_n q) a_n \in S$

• περίπτωση $r > 0 \Rightarrow r \in \mathbb{N}$
$r \in S$ $\Bigg\} \Rightarrow r \in S \cap \mathbb{N}$
$r < d$
d ελάχιστο στοιχείο του $S \cap \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Το $r \in S \cap \mathbb{N}$ και είναι αυστηρά μικρότερο από το d, που είναι το ελάχιστο στοιχείο του $S \cap \mathbb{N}$, άτοπο!

Άρα $r = 0 \Rightarrow a = qd + 0 = qd \Rightarrow d/a$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \in S \Rightarrow d/a_1 \\ a_2 \in S \Rightarrow d/a_2 \\ \vdots \\ a_n \in S \Rightarrow d/a_n \end{array}\right\} \quad d \text{ κοινός διαιρέτης των } a_1, \dots, a_n$$

$$\text{Έστω } \left.\begin{array}{l} \delta/a_1 \\ \vdots \\ \delta/a_n \end{array}\right\} \Rightarrow \delta/k_1 a_1 + \dots + k_n a_n \Rightarrow \delta/d \Rightarrow \delta \leq d.$$

Άρα ο d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης.

Παράδειγμα ΜΚΔ(65, 15) = 5

"Διαιρώ τον μεγάλο με τον μικρό"

$65 = 4 \cdot 15 + 5$

$15 = 3 \cdot 5 + 0$

παίρνω τον μικρό και τον διαιρώ με το υπόλοιπο. Το τελευταίο μη-μηδενικό υπόλοιπο είναι ο ΜΚΔ

$5 = 1 \cdot 65 - 4 \cdot 15$.

Παράδειγμα ΜΚΔ(100, 63)

$100 = 1 \cdot 63 + 37$

$63 = 1 \cdot 37 + 26$

$37 = 1 \cdot 26 + 11$

$26 = 2 \cdot 11 + 4$

$11 = 2 \cdot 4 + 3$

$4 = 1 \cdot 3 + 1 \to$ ΜΚΔ

$3 = 3 \cdot 1 + \underline{\underline{0}}$

ΜΚΔ(100, 63) = 1

Γράφω το ΜΚΔ σαν γραμμικό συνδυασμό των 100, 63

$$\begin{aligned}
1 = 4 - 3 &= 4 - (11 - 2 \cdot 4) \\
&= 3 \cdot 4 - 11 = 3(26 - 2 \cdot 11) - 11 \\
&= 3 \cdot 26 - 7 \cdot 11 = 3 \cdot 26 - 7(37 - 26) \\
&= 10 \cdot 26 - 7 \cdot 37 \\
&= 10(63 - 37) - 7 \cdot 37 \\
&= 10 \cdot 63 - 17 \cdot 37 \\
&= 10 \cdot 63 - 17(100 - 63) \\
&= 27 \cdot 63 - 17 \cdot 100
\end{aligned}$$